ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

No. 932.

Addition au Mémoire de Mr. *Jean Plana* sur la Théorie du Magnétisme dans le Numéro 927 de ce Journal.

§ V.

Pour démontrer que, dans le cas de la sphère douée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des x, il suffit de remplacer dans les formules (14) le coefficient B par $BM+CN$, et le coefficient C par $CM-BN$, il faut d'abord observer, que les coordonnées x', y', z' d'un point quelconque de sa masse soient exprimées par

$$x' = r' \cos\theta'; \qquad y' = r' \sin\theta' \sin(nt+\psi'); \qquad z' = r' \sin\theta' \cos(nt+\psi');$$

où n désigne la vitesse angulaire et t le temps.

Après cela, il faut partir du principe, que la forme de la fonction φ' demeure la même que dans le cas du repos; de sorte que le changement qu'elle doit subir, porte seulement sur les coefficiens constans. Ainsi, ayant trouvé dans le cas du repos;

$$\varphi' = r' U'_{(1)} = -\frac{3}{4\pi} r' \cdot \{A \cos\theta' + B \sin\theta' \sin\psi' + C \sin\theta' \cos\psi'\},$$

on fera dans le cas du mouvement:

$$\varphi' = r' \{A_{(1)} \cos\theta' + A_{(2)} \sin\theta' \sin(nt+\psi') + A_{(3)} \sin\theta' \cos(nt+\psi')\};$$

où $A_{(1)}$, $A_{(2)}$, $A_{(3)}$ sont trois coefficiens constans, qu'il s'agit de déterminer de manière que l'équilibre magnétique puisse avoir lieu. Cette valeur de φ' donne

$$\left(\frac{d\varphi'}{dr'}\right) = A_{(1)} \cos\theta' + A_{(2)} \sin\theta' \sin(nt+\psi') + A_{(3)} \sin\theta' \cos(nt+\psi'); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

donc en la substituant dans la formule

$$Q = Kr'^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\varphi'}{dr'}\right) \cdot \frac{\sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'}{\rho},$$

et faisant

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r'} + \frac{r}{r'^2} V'_{(1)},$$

on aura

$$Q = \frac{4\pi K}{3} r \{A_{(1)} \cos\theta + A_{(2)} \sin\theta \sin(nt+\psi) + A_{(3)} \sin\theta \cos(nt+\psi)\}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Cette valeur de Q appartient à tout point placé dans l'intérieur de la sphère, dont r, θ, et $nt+\psi$ sont les coordonnées polaires: en la différentiant par rapport au rayon vecteur r seulement, l'on a

$$\left(\frac{dQ}{dr}\right) = \frac{4\pi K}{3} \{A_{(1)} \cos\theta + A_{(2)} \sin\theta \sin(nt+\psi) + A_{(3)} \sin\theta \cos(nt+\psi)\}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Cela posé, si l'on désigne par $\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)$ ce que devient la valeur de $\left(\frac{d\varphi'}{dr'}\right)$, déterminée par l'équation (15) pour le même point, nous aurons

$$-\frac{4\pi K}{3}\left(\frac{d\Phi}{dr}\right) = -\frac{4\pi K}{3} \{A_{(1)} \cos\theta + A_{(2)} \sin\theta \sin(nt+\psi) + A_{(3)} \sin\theta \cos(nt+\psi)\}. \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Et le trinome

$$V = Ax + By + Cz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

qui, par ses différences partielles, fournit les composantes de la force magnétique émanée de la Terre donne

$$\left(\frac{dV}{dr}\right) = A \cos\theta + B \sin\theta \sin(nt+\psi) + C \sin\theta \cos(nt+\psi). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Maintenant, si nous désignons par $\left(\frac{d\Phi_{(1)}}{dr}\right)$ ce que devient le second membre de l'équation (15), en y faisant $t=\tau$, $\theta'=\theta$, $\psi'=\psi$, l'on aura

$$\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d\Phi_{(1)}}{dr}\right)=\frac{4\pi}{3}\left\{A_{(1)}\cos\theta+A_{(2)}\sin\theta\sin(n\tau+\psi)+A_{(3)}\sin\theta\cos(n\tau+\psi)\right\};\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

où τ doit être considéré comme un intervalle de temps très-court, après lequel, l'état magnétique de la sphère en mouvement est devenu permanent: ou, en d'autres termes, après le temps τ, compté depuis le commencement du mouvement, toute décomposition nouvelle du fluide neutre a cessé. Or, dans le cas du mouvement, le principe général de l'équilibre magnétique consiste en ceci; que l'intégrale définie

$$\int_0^\tau dt f'(\tau-t)\left\{\left(\frac{dV}{dr}\right)+\left(\frac{dQ}{dr}\right)-\frac{4\pi K}{3}\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)\right\}$$

doit donner une fonction de τ, précisément égale et de signe contraire à celle désignée par $\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d\Phi_{(1)}}{dr}\right)$.

Et comme, ici, les équations (17) et (18) donnent

$$\left(\frac{dQ}{dr}\right)-\frac{4\pi K}{3}\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)=0,$$

l'on a

$$\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d\Phi_{(1)}}{dr}\right)+\int_0^\tau dt f'(\tau-t)\left(\frac{dV}{dr}\right)=0.\ldots(22)$$

Maintenant, si l'on observe que $nt+\psi=n\tau+\psi-n(\tau-t)$, et que l'équation (20) est équivalente à celle-ci:

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)=A\cos\theta+\left\{B\cos.n(\tau-t)+C\sin.n(\tau-t)\right\}\sin\theta\sin(n\tau+\psi)$$
$$+\left\{C\cos.n(\tau-t)-B\sin.n(\tau-t)\right\}\sin\theta\cos(n\tau+\psi),$$

on en conclura que l'équation (22) ne peut être satisfaite par identité (c'est-à-dire pour toute valeur de θ et ψ) sans égaler séparément à zéro les coefficiens de

$$\cos\theta,\quad \sin(n\tau+\psi),\quad \cos(n\tau+\psi).$$

Donc en faisant

$$\int_0^\tau dt f'(\tau-t)\cos.n(\tau-t)=M,$$

$$\int_0^\tau dt f'(\tau-t)\sin.n(\tau-t)=N,$$

$$\int_0^\tau dt f'(\tau-t)=f(\tau-0)-f(\tau-\tau)=q,$$

l'on aura ces trois équations

$$\left.\begin{aligned}&\frac{4\pi}{3}A_{(1)}+qA=0,\\&\frac{4\pi}{3}A_{(2)}+MB+NC=0,\\&\frac{4\pi}{3}A_{(3)}+MC-NB=0.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(23)$$

Lorsque la sphère est immobile l'on a $n=0$, et par conséquent $N=0$, $M=q$. Il faut donc faire $q=1$, pour faire coïncider cette solution avec la précédente. Il suit de là que

$$Q=-\frac{Ka^3}{r^3}\left\{Ax+(BM+CN)y+(CM-BN)z\right\}\ldots(24)$$

qui est le résultat annoncé dans le § IV.

Telle est la nature de la fonction $f'(\tau-t)$, que les élémens des trois intégrales définies M, N, q décroissent rapidement après les premiers instans du mouvement: au point que ces intégrales, évaluées entre les limites $t=\tau$, $t=\infty$, auraient des valeurs sensiblement nulles. De sorte que l'on peut y remplacer le signe $\int_0^\tau$ par le signe $\int_0^\infty$.

Jean Plana.